Vektorer i rummet

**Definition** Vektor

 En vektor er fastlagt ved en længde og en retning

Vektoren med koordinatsættet   kaldes for nulvektoren, alle andre vektorer
kaldes for egentlige vektorer

 En repræsentant for en vektor kan afbildes et vilkårligt sted i koordinatsystemet.
 En sted vektor har altid startpunkt i koordinatsystemets begyndelsespunkt.

**Sætning** Længden af en vektor

 Længden af en vektor betegnes , og beregnes på følgende måde

**Bevis** Brug Pythagoras sætning

**Bemærk** Nulvektoren   har længden 0
 En enhedsvektor er en vektor med længden 1

**Definition** Regning med koordinater

 Lad   og  være to vektorer, og være tal

1. vektoren er en enhedsvektor som er ensrettet med

**Sætning** Parallelle vektorer

 To egentlige vektorer   og   kaldes parallelle netop når der findes et tal , så

 Hvis er et positivt tal kaldes vektorerne ensrettede.
 Hvis er et negativt tal kaldes vektorerne modsatrettede.

**Regneregler** Lad  , og være vektorer, og lad og være tal

1. den associative lov
2. den kommutative lov

**Bevis**

1.

**Øvelse 1** bevis 3. til 7.

**Øvelse 2** Tre vektorer er givet ved ,   og

 Bestem koordinaterne til vektorerne  ,  , ,   og

 Bestem længden af vektorerne

**Indskudsreglen** For vilkårlige punkter *A, B* og *C* i rummet gælder

**Sætning** Bestemmelse af en vektors koordinater ud fra to punkter.

Hvis og , så er

**Bevis** Ifølge indskudsreglen har vi at ,

hvilket giver at

**Eksempel** Hvis og

**Øvelse 3** Lad en trekant være givet ved , og

Tegn de tre punkter ind i et koordinatsystem.

Bestem vektorerne  ,   og  .

Bestem dernæst længden af de tre vektorer og .

**Definition** Skalarproduktet (prikproduktet) mellem to vektorer og er

 Symbolet læses ”a prik b”

**Eksempel** og

 **Sætning** Regneregler for skalarproduktet

1. den kommutative lov
2. den distrubtive lov
3. den associative lov

**Bevis** Overlades til læseren ved at regne med koordinater

 **Øvelse 5** Tre vektorer er givet ved ,   og

 Bestem skalar/prikprodukterne  ,  og

**Definition** En vinkel mellem to vektorer er altid den mindste vinkel de to vektorer danner

**Sætning** Vinklen mellem de to egentlige vektorer  og er givet ved

**Bevis** Vi ved fra tidligere, at vi kan afsætte en repræsentant for en vektor et vilkårligt sted i koordinatsystemet, bare der ikke ændres på længden og retningen

Lad os vise at skalarproduktet kun er afhængig af vektorernes længder:

 Vis starter med at se på udtrykket

 Nu trækkes og fra på begge sider a lighedstegnet

 Nu ganges der med på begge sider af lighedstegnet

 Vi udnytter regnereglen

 Vi kan altså se at prikproduktet kun afhænger af vektorernes længder

 Vi kan derfor vælge at placere  langs -aksen, derved bliver

Vektor  danner vinklen med  og dermed første aksen, derfor bliver

 Vi kan nu bestemme

 Hvilket giver

 Nu dividerer vi med og på begge sider af lighedstegnet

Da gælder sætningen for enhver vinkel mellem de to vektorer

**Eksempel** Bestem vinklen mellem  og

Hvilket giver at

**Sætning** To egentlige vektorer  og   er ortogonale hvis og kun hvis

**Bevis** Vi ved fra ovenstående bevis at

 Hvis de to vektorer er ortogonale, så må det gælde, at

Hvis det gælder at har vi

Hvilket så betyder at

**Eksempel** Vi vil undersøge om   og   er ortogonale

 Skalarproduktet beregnes

 Da skalarproduktet er 0 er de to vektorer altså ortogonale

**Øvelse 6** Undersøg om og   er ortogonale

**Øvelse 7** Bestem vinklen mellem og

**Øvelse 8** Bestem så vektorerne   og   er ortogonale

Linjer i rummet

**Definition** Linjens parameterfremstilling

En linje der går gennem punktet og med retningsvektor  , har
følgende parameterfremstilling

**Eksempel**  Linjen går gennem punktet og med retningsvektor   beskrives

Skæringen mellem to linjer

Skæringen mellem to linjer givet ved deres parameterfremstillinger bestemmes ved at sætte to af de tre udtryk for og lig med hinanden. Derefter afprøves det om det passer med det tredje udtryk.

**Eksempel** Lad os se på linjerne og givet ved

 Vi sætter -koordinaterne lig med hinanden

 isoleres

Vi sætter -koordinaterne lig med hinanden

 Udtrykket for indsættes

 Ligningen løses mht.

 Værdien for indsættes i udtrykket for

 Nu undersøges det om og har samme -koordinat for

 indsættes i

 indsættes i

Da begge linjer har samme -koordinat, kan vi konstatere at de to linjer skærer
hinanden med skæringspunkt

**Øvelse 9** Bestem skæringspunktet mellem linjerne og givet ved

**Eksempel** Lad os se på linjerne og givet ved

 Vi sætter -koordinaterne lig med hinanden

 isoleres

Vi sætter -koordinaterne lig med hinanden

 Udtrykket for indsættes

 Ligningen løses mht.

 Værdien for indsættes i udtrykket for

 Nu undersøges det om og har samme -koordinat for

 indsættes i

 indsættes i

 De to linjer skærer altså ikke hinanden.

Vinklen mellem to linjer

Hvis to linjer i rummet skærer hinanden, kan vi tale om vinklen mellem de to linjer

Vinklen bestemmes som vinklen mellem de to retningsvektorer

**Eksempel** Lad os se på linjerne og givet ved

Tidligere viste vi at de to linjer skar hinanden i punktet

 Fra tidligere ved vi desuden også at

*.*

Hvilket giver at

**Øvelse 10** Bestem vinklen mellem linjerne og givet ved

Vektorprodukt

**Definition** Vektorprodukt (krydsprodukt)

 Lad   og  , så er vektorproduktet givet ved

**Eksempel** Lad   og  , så får vi

**Sætninger**  Vektorprodukt (krydsprodukt)

1. Længden af vektorproduktet kan bestemmes ved , hvor er vinklen mellem de to vektorer.
2. Hvis , så er   vinkelret på både   og  .
3. Hvis , så danner  ,   og en højreskrue.
4. Hvis , så er vektorerne   og   parallelle, dvs. .
5. Arealet af af det af vektorerne   og  udspændte parallelogram er givet ved længden af vektorproduktet
6. Afstanden fra et punkt til linjen gennem med retningsvektoren   er givet ved

**Eksempel** Fra tidligere har vi at og   giver at

 Vi kan altså konstatere at er vinkelret på både   og

**Eksempel** Arealet af et parallelogram udspændt af to vektorer

Lad   og  , så får vi

**Eksempel** Afstanden fra punkt til linje

Afstanden fra punktet til linjen gennem med retningsvektoren
 , er givet ved

**Sætning** Afstanden mellem et punkt og en linje i rummet

 Lad linjen går gennem punktet og have retningsvektoren

 Afstanden fra punktet til linjen er givet ved

**Bevis**

****

Hvilket giver

Ved at forlænge med fås

Fra tidligere sætning får vi nu

Planer i rummet

**Sætning** Ligningen for en plan i rummet

 Ligningen for en plan i rummet er givet ved

,

 hvor   er en normalvektor til planen og er et punkt på planen.

**Bevis**

Lad være et fast punkt på planen.

Så er   en vektor i planen som står vinkelret på normalvektoren

Derfor gælder

Bemærk at normalvektoren kan aflæses som koefficienterne til og

**Sætning** Afstanden mellem et punkt og en plan i rummet

Afstanden mellem punktet og planen er
givet ved

**Bevis**

Lad være et fast punkt på planen

Så er afstanden givet ved længden af projektionen af   på

****

Kuglens tangentplan

Lad os se på kuglen med centrum i og med radius

Punktet ligger på linjen, ses nemt ved at se at punktet opfylder kuglens ligning

Vektoren   er normalvektor til den plan der går gennem punktet og tangerer kuglen

En ligning for planen findes ved at indsætte i ligningen for en plan

Skæring mellem en linje og en plan

Skæring mellem planen med ligningen og linjen med parameterfremstillingen findes ved at indsætte i

Herefter indsættes -værdien i linjens ligning

Altså er skæringspunktet

Vinklen mellem en linje og en plan

Vinklen mellem en linje og en plan er givet ved , hvor er vinklen mellem linjens retningsvektor og planens normalvektor

Lad os se på og

Så bliver og derfor bliver

Vinklen mellem to planer

Vinklen mellem to planer er vinklen mellem de to planers normalvektorer eller supplementsvinklen

Lad os se på og

Så eller

**Definition** Vindskæve linjer

To linjer som ikke er parallelle og som ikke har et skæringspunkt kaldes vindskæve